Sistemas de control por relé

Curso: 01-02 — 11.06.2002
Examen Final — Gerrit Färber

Programa Doctorado: Automatización Avanzada y Robótica
Instituto de Organización y control de Sistemas Industriales

Problema:
Dada una planta con una función de transferencia (Ec. 1.1) . Se cierra el lazo de control con un controlador tipo relé (Fig. 1.2) con histéresis positiva x_0, sin zona muerta y con valor de salida $k_r = 100$.

Sistema con Relé:

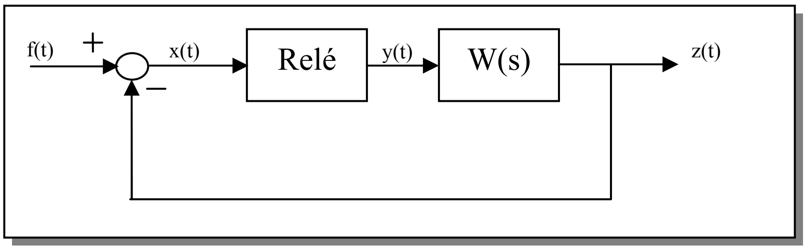


Fig.1.1: Gráfico de bloques del sistema.

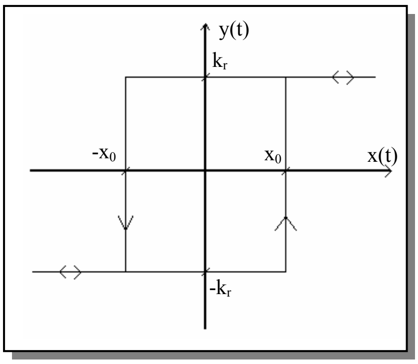


Fig.1.2: Comportamiento del Relé con histéresis, sin zona muerta.

Problema-1
Planteamiento: Determinar una cota superior de x_0 para que la frecuencia de las auto-oscilaciones del sistema sea mayor que 5rad/s:

La función de transferencia del sistema: $$\boxed{W(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}s + 1}}$$ **Ec. (1.1)**

Función de transferencia del Relé: $$\boxed{Y(s) = L\{\Phi(x(t), \sigma)\}}$$

Valores dados:
$k_r = 100$
$f_{auto} = 5$ rad/s

Solución:
Para determinar las auto-oscilaciones del sistema con control por relé, el hodógrafo J(ω) del conjunto de K(s) y del relé tiene que cortar la linea recta -x_0 (paralela a la eje real). El hodógrafo se puede encontrar, en lazo abierto, mediante la ecuación (1.2) en el caso general, o mediante la ecuación (1.3) en el caso particular (sin zona muerta, con histéresis). El corte entonces es el punto posible de auto-oscilaciones con una cierta frecuencia. La estabilidad de este punto será tratada en Problema-3.
Primero es necesario determinar los polos del sistema W(s). Segundo: determinar la función del hodógrafo.

Calculación de los Polos de W(s):
$$s_{1/2} = -\tfrac{1}{2\sqrt{2}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{8} - 1} = -\tfrac{1}{2\sqrt{2}} \pm j\,\tfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$
tal que:
$$s_1 = -\tfrac{1}{2\sqrt{2}} + j\,\tfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$
$$s_2 = -\tfrac{1}{2\sqrt{2}} - j\,\tfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

Hodógrafo:
Fórmula general del hodógrafo: $$\boxed{J(\omega) = -\tfrac{1}{\omega} \cdot \dot{\tilde{z}}^{-}(\tfrac{\pi}{\omega}) - j \cdot \tilde{z}(\tfrac{\pi}{\omega})}$$ **Ec. (1.2)**

con $$\tilde{z}(s) = W(s) \cdot \mathcal{L}\{\Phi(x(t), \sigma)\}$$

En el caso particular (sin zona muerta; polos no cero y parejas) la ecuación tiene la forma siguiente:
$$\boxed{J(\omega) = -k_r\left\{\tfrac{1}{\omega}\left[\tau' + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{P(s_\nu)}{Q'(s_\nu)} \cdot \tanh\left(\frac{\pi \cdot s_\nu}{2\omega}\right)\right] + j\sum_{\nu=1}^{n}\frac{P(s_\nu)}{Q'(s_\nu) \cdot s_\nu} \cdot \tanh\left(\frac{\pi \cdot s_\nu}{2\omega}\right)\right\}}$$ **Ec. (1.3)**

Resolver la función del hodógrafo usando:

$\tau' = \lim_{s\to\infty}(s \cdot W(s)) = \frac{1}{s + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{s}} = 0$	$k_r = 100$
$Q(s) = s^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}s + 1$	$Q'(s) = 2s + \frac{1}{\sqrt{2}}$
$s_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + j\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$	$s_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - j\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

Función del hodógrafo de la planta W(s) con el relé.

$$
\begin{aligned}
J(\omega) = -100 \Bigg\{ & \tfrac{1}{\omega}\left[0 + \frac{1}{j\sqrt{\frac{7}{2}}} \cdot \tanh\left(\frac{\pi \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + j\,\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)}{2\omega} \right) - \frac{1}{j\sqrt{\frac{7}{2}}} \cdot \tanh\left(\frac{\pi \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} - j\,\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)}{2\omega} \right) \right] + \\
& j \left(\frac{1}{j\sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + j\,\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)} \cdot \tanh\left(\frac{\pi \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + j\,\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)}{2\omega} \right) - \frac{1}{j\sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} - j\,\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)} \cdot \tanh\left(\frac{\pi \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} - j\,\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)}{2\omega} \right) \right) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

Criterios del hodógrafo *J(w)*:

Punto inicial: $\lim\limits_{\omega \to 0} \left(J(\omega) \right) = 0 - 100\,j$

Punto final: $\lim\limits_{\omega \to \infty} \left(J(\omega) \right) = 0 + 0\,j$

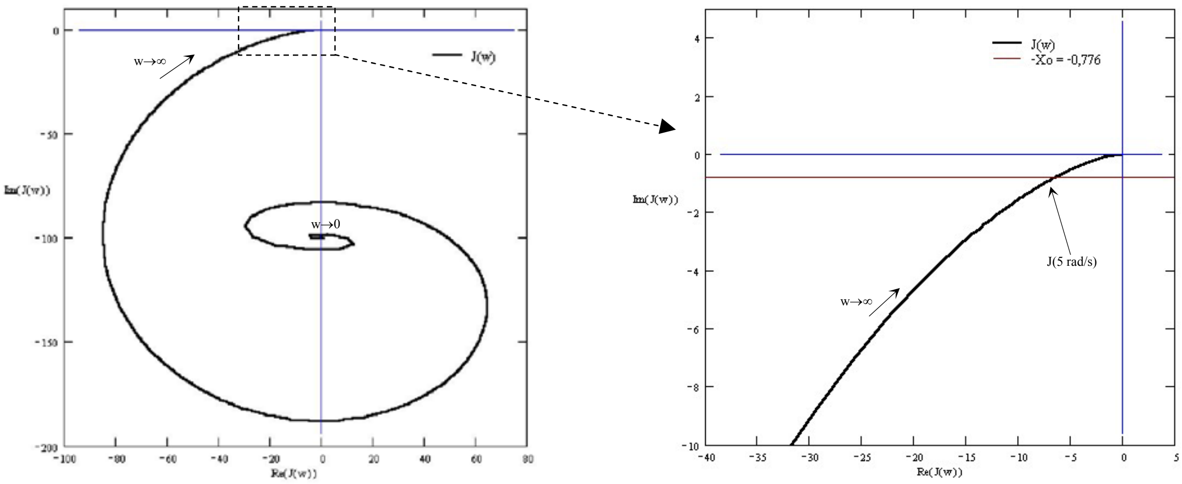


Fig. 1.3: El hodógrafo corta la línea recta $-x_0$ = 0.776 con la frecuencia ω = 5rad/s.

El valor $-x_0$ tiene como máximo el valor imaginaria de J(5rad/s): $J(5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}) = -6.384 - 0.776\,j$.

Problema-1: $\boxed{0 < x_0 < 0.776}$

Verificación del resultado mediante Simulación en Matlab:

<u>Parámetros del relé</u>:

"Switch on time"	0.776
"Switch off time"	-0.776
"Output when on"	100
"Output when off"	-100

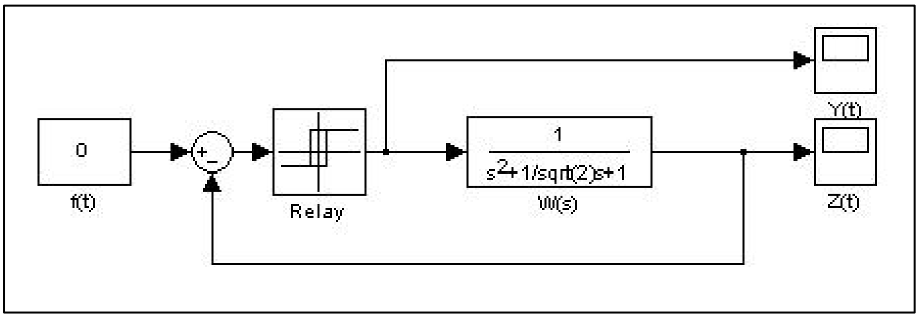


Fig 1.4: Grafo de bloques de la simulación en Matlab.

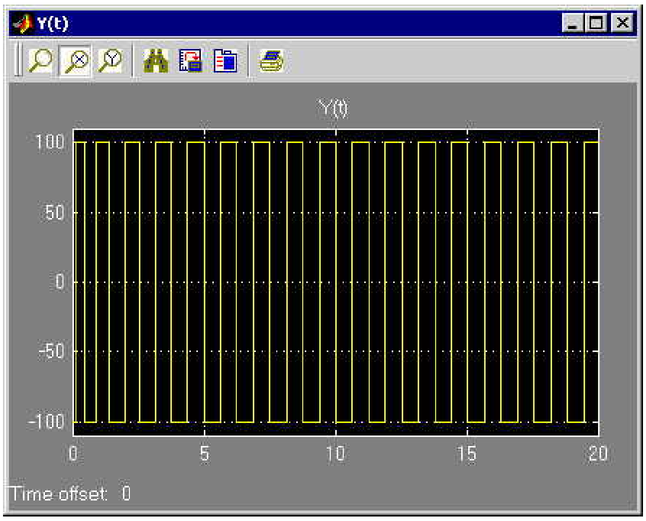


Fig 1.5-a: Señal del la salida del Relé Y(t).

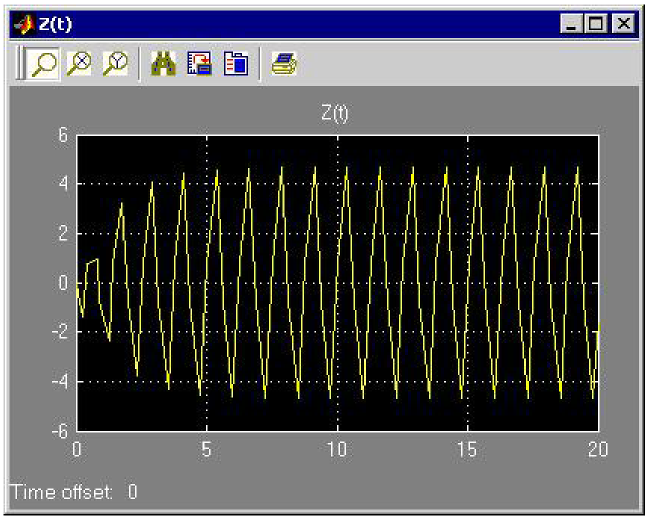


Fig 1.5-b: Señal del la salida de la planta Z(t)

.

La figura 1.5-a muestra la salida del relé, en figura 1.5-b se ve que la planta se establece después de aproximadamente 5sec. Con Figura 1.5-b se puede calcular el tiempo T:

$$T = \frac{10\,\text{sec}}{8\text{oscilaciones}} = 1.25\,\text{sec}$$

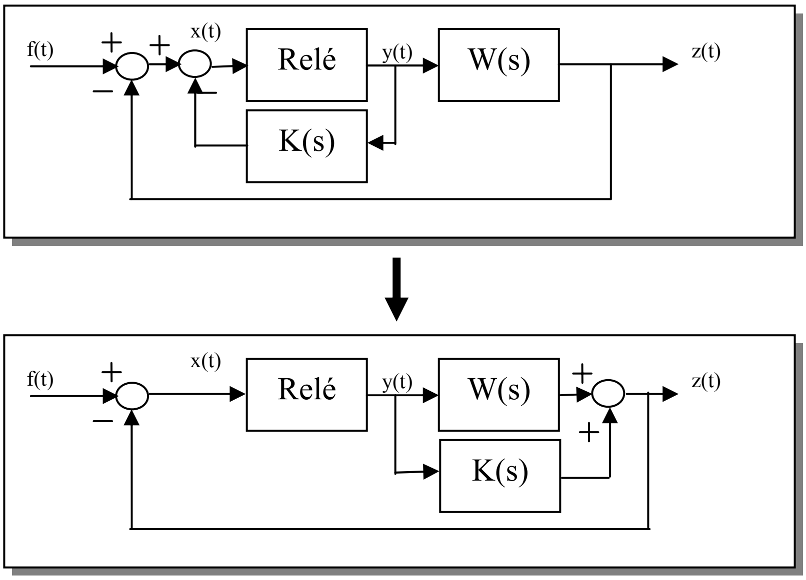
$$f = \frac{2 \cdot \pi}{1.25\,\text{sec}} = 5.02\,\tfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

El tiempo T de las auto-oscilaciones tiene aproximadamente el valor 1.25 sec. Por lo tanto la frecuencia es 5.02rad/s.

Problema-2

Planteamiento: Si $x_0 = 2$ y se realimenta el controlador relé con un sistema del tipo $K(s) = k_i/s$. Hallar el valor de k_i tal que la frecuencia de las auto-oscilaciones es 5 rad/s.

El sistema con realimentación del relé se puede cambiar en una alimentación directa de la planta W(s). El hodógrafo del conjunto entonces obtiene una forma mas fácil de calcular.



Solución:

con $\boxed{K(s) = \frac{k_i}{s}}$ y $\boxed{k_0 = k_i \cdot k_r}$ $\Rightarrow$ $\boxed{J1(\omega) = -\frac{k_i \cdot k_r}{\omega} \cdot \left(1 + j\frac{\pi}{2}\right)}$ (función del hodógrafo de K(s); k_r = ganancia del relé)

Esquemático de la sumatoria de dos hodógrafos:

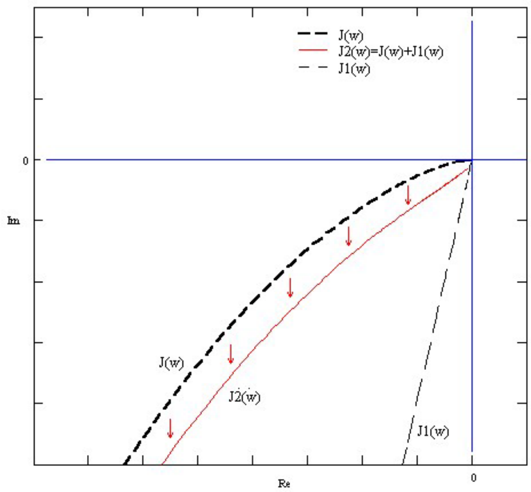
Sumatoria de los dos hodógrafos:

$$\boxed{J2(\omega) = J(\omega) + J1(\omega)}$$

$J(\omega)$ = función del hodógrafo de Problema-1

$J1(\omega)$ = función del hodógrafo de K(s)

$J2(\omega)$ = nueva función del hodógrafo



Es suficiente considerar la parte Imaginaria de los dos hodógrafos de la frecuencia en pregunta:

$$\mathrm{Im}(J(5\tfrac{rad}{s})) = -0.7760$$

$$\mathrm{Im}(J1(5\tfrac{rad}{s})) = -\frac{k_i \cdot k_r}{5\frac{rad}{s}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Cortar con $\boxed{-x_0 = -2}$:

$$-2 = -0.776 - \frac{k_i \cdot 100}{5\frac{rad}{s}} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad k_i = 0.03896$$

Problema-2: $\boxed{k_i = 0.03896}$

<u>Problema-3</u>
Planteamiento: Decidir sobre la estabilidad o no de los modos periódicos que se establecen en los apartados 1 y 2.

Si la parte lineal del sistema es estable o neutral y la parte real de $\mathrm{Re}(J(\omega_0))<0$, se puede aplicar las condiciones:

auto-oscilaciones estable si: $\left.\frac{d\,\mathrm{Im}(J(\omega))}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} > 0$

auto-oscilaciones inestable si: $\left.\frac{d\,\mathrm{Im}(J(\omega))}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} < 0$

Solución:
<u>Problema-1:</u>
1. Los polos de la planta W(s) están en el semiplano complejo izquierdo (ver s_1 y s_2 en Problema-1).
2. La parte Re(J(5rad/s) = -6.384 < 0. Por lo tanto se aplica las condiciones de la derivada del parte imaginaria.

3. La frecuencia es $\omega_0 = 5\frac{rad}{s}$.

por lo tanto: $\frac{d\,\mathrm{Im}(J(5rad/s))}{d\omega} = 0.484 > 0$

Se sigue que el sistema tiene auto-oscilaciones estables con la frecuencia $\omega_0 = 5\frac{rad}{s}$.

Problema-3-1: **estable**

<u>Problema-2:</u>
1. Los polos de la planta W(s) están en el semiplano complejo izquierdo (ver s_1 y s_2 en Problema-1).
2. La parte $\mathrm{Re}(J_2(5rad/s)) < 0$. Por lo tanto se aplica las condiciones de la derivada de la parte imaginaria.

3. La frecuencia es $\omega_0 = 5\frac{rad}{s}$.

por lo tanto: $\frac{d\,\mathrm{Im}(J_2(5rad/s))}{d\omega} = 0.72 > 0$

Se sigue que el sistema tiene auto-oscilaciones estables en la frecuencia $\omega_0 = 5\frac{rad}{s}$.

Problema-3-2: **estable**

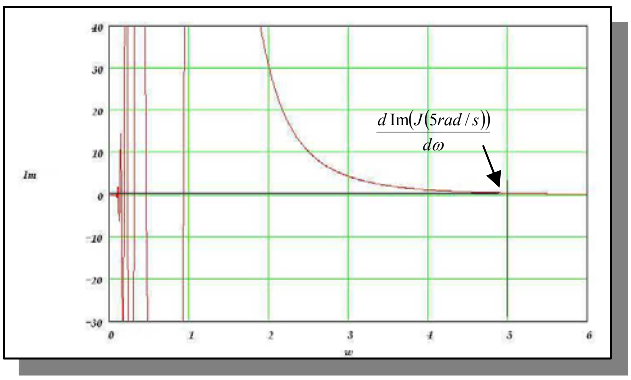
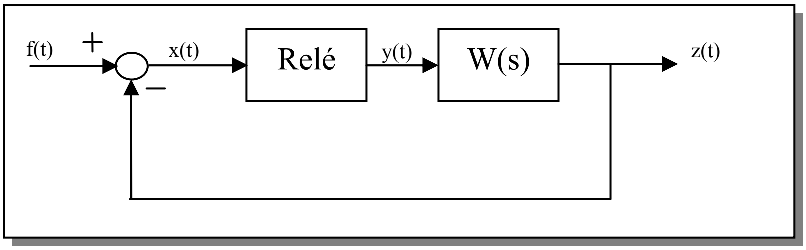


Fig 3.1: Grafo de $\frac{d\,\mathrm{Im}(J(\omega))}{d\omega}$

Problema-4

Planteamiento: El sistema de control por relé (con $x_0 = 2$) se somete a una consigna del tipo:

Sistema de Problema-1:



Función de la señal de la entrada $\boxed{\tilde{f}(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)}$

(a) Determinar y graficar la función $A_{crit} = h(w)$.

con $\boxed{\mathrm{Re}(J(\omega_0)) < 0}$ $\Rightarrow$ existe A_{1crit} tal que $\boxed{A_{1crit}(\omega) = \dfrac{\left|\mathrm{Im}(J(\omega_0)) + x_0\right|}{\left|\tilde{f}_0(\pi - \varphi)\right|}}$

con $\boxed{\mathrm{Re}(J(\omega_0)) > 0}$ $\Rightarrow$ existe A_{2crit} tal que $\boxed{A_{2crit}(\omega) = \sqrt{\dfrac{\left[\mathrm{Re}(J(\omega_0))\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(J(\omega_0)) + x_0\right]^2}{\left[\tilde{f}_0'(\pi - \varphi)\right]^2 + \left[\tilde{f}_0(\pi - \varphi)\right]^2}}}$

Solución:

La señal $\tilde{f}(t)$ es una función sen, por lo tanto tiene la forma de un círculo en el plano complejo. Entonces en las dos funciones de A_{1crit} y A_{2crit} el denominador es igual a 1.

Por lo tanto:

$$\boxed{A_{1crit}(\omega) = \left|\mathrm{Im}(J(\omega_0)) + x_0\right|} \qquad \textbf{Ec. (4.1)}$$

$$\boxed{A_{2crit}(\omega) = \sqrt{\left[\mathrm{Re}(J(\omega_0))\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(J(\omega_0)) + x_0\right]^2}} \qquad \textbf{Ec. (4.2)}$$

Fácilmente se puede obtener la función de A_{crit} en relación de w con la función "signum":

$$\boxed{A_{crit}(\omega) = h(\omega) = \left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sign}\left(-\mathrm{Re}(J(w))\right)\right] \cdot A_{1crit} + \left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sign}\left(\mathrm{Re}(J(w))\right)\right] \cdot A_{2crit}} \qquad \textbf{Ec. (4.3)}$$

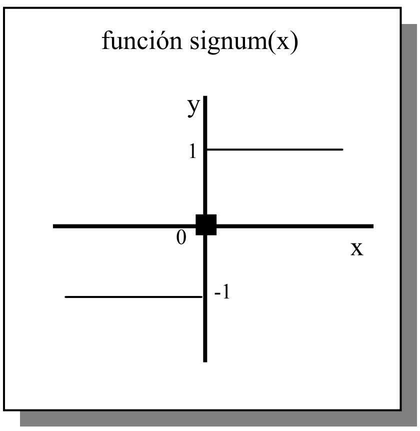


Fig 4.1: Función signum(x).

La función tiene sus valores en (-1 / 0 / 1)

y se determina $\mathrm{signum}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

La traslación a los valores (0 / 0.5 / 1) tiene la ecuacion: $\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(x)}$

En los puntos (x = 0) donde la ecuación $A_{crit}(w)$ (Ec. 4.3) corta la eje imaginaria, los valores A_{1crit} y A_{2crit} tienen el mismo valor. Una multiplicación con 0.5 de ambas funciones y la siguiente adición mantiene el mismo valor.

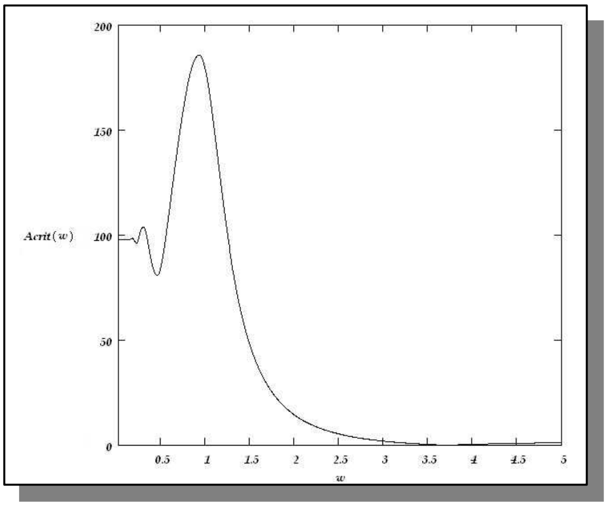


Fig 4.2-a: Función $A_{crit}(w)$

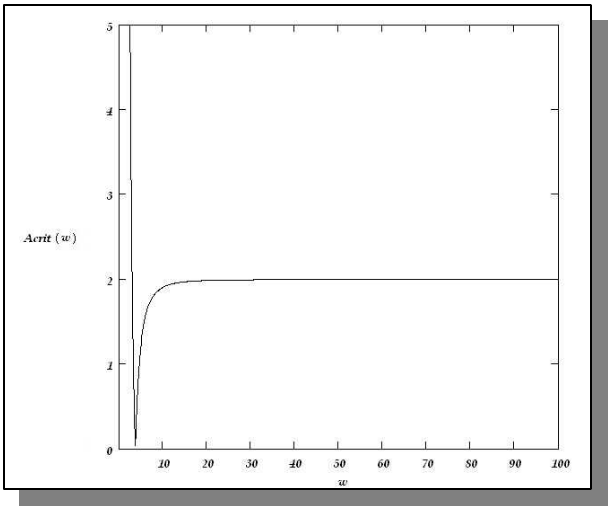


Fig 4.2-b: Función $A_{crit}(w)$ con acercamiento en w_0.

Las Figuras (4.2-a) y (4.2-b) muestran la función $A_{crit}(w)$. En la frecuencia ω = 3.706 rad/s (f = 0.59Hz) bajando a 0. Este punto es la frecuencia de auto-oscilaciones con un relé de $x_0 = 2$ (En Problema-1 era $x_0 = 0.776$, entonces la frecuencia de auto-oscilaciones era w = 5 rad/s). $J(\omega)$ converge al origen del grafo (0/0j) con $\omega \to \infty$. La función $A_{crit}(\omega)$ entonces converge a 2 siendo la distancia a la recta $-x_0$.

Problema-4-a: Grafo de $A_{crit}(w)$

(b) ¿Cuál es el valor mínimo de A para que se establezcan oscilaciones forzadas de frecuencia $f_1 = 0.3\ Hz$

La solución se puede obtener mediante el grafo de A_{crit} de Problema-4a o mediante la calculo directa en el hodógrafo.

Solución:
1) Mediante h(w): $\boxed{h(0.3 \cdot 2 \cdot \pi) = 18.665}$

2) Mediante calculación directa en el hodógrafo:

$\boxed{J(0.3Hz) = -47.637 - 20.665j}$

$\mathrm{Re}(J(0.3Hz)) = -47.637 < 0 \quad \Rightarrow$ Está en el semiplano izquierdo.

A de $\tilde{f}(t)$ corresponde a la parte imaginaria de $J(w)$ del Problema-1 menos x_0.

$\mathrm{Im}\left(J\left(0.3 \cdot \frac{2\pi}{s}\right)\right) = \mathrm{Im}\left(J\left(1.885 \frac{rad}{s}\right)\right) = -20.665$

$A = -2 - (-20.665) = 18.665$

Problema-4-b: $\boxed{A = 18.665}$

(c) Si $f_1 = 0.3\ Hz$ y $A = 30$. Determinar los posibles desfases y la estabilidad de los modos periódicos forzados que se generan.

valores dados: $f_1 = 0.3Hz = 1.885\ rad/s$
$A = 30$

Solución:
Con una ganancia de f(t) mas grande que $A=18.665$ se sigue que hay dos desfases posibles en el hodógrafo, φ_1 y φ_2:

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{A_{\min}}{A}\right) = \arcsin\left(\frac{18.665}{30}\right) = 38.47^\circ \qquad \varphi_2 = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{A_{\min}}{A}\right) = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{18.665}{30}\right) = 141.525^\circ$$

El lugar del desfase φ_2 está a la izquierda del punto $J(w_0)$. La distancia d_2 del lugar de φ_2 al eje imaginario es positivo. Por eso φ_2 también es un desfase que puede ocurrir.

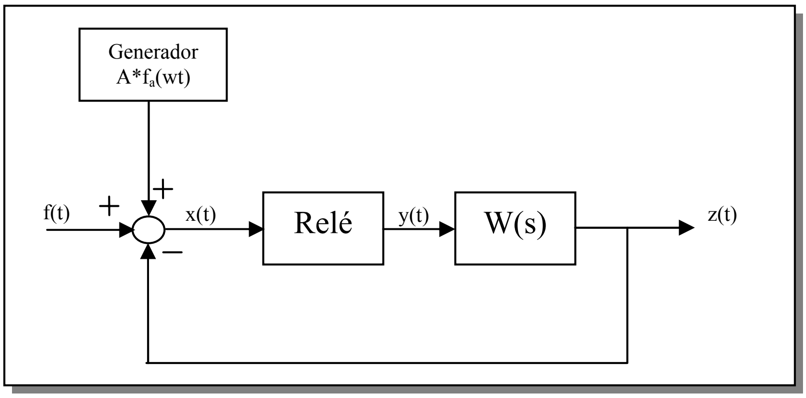
$$d_2 = \left|\mathrm{Re}(J(\omega_0))\right| - \sqrt{A^2 - A_{crit}^2(\omega_0)} = 47.637 - \sqrt{30^2 - 18.665^2} = 24.15$$

Con la frecuencia de la entrada siendo un círculo el ángulo φ_2 no puede estar a la izquierda de $J(w_0)$, por lo tanto es un desfase inestable. El desfase φ_1 está a la izquierda de $J(w_0)$, por lo tanto sí es estable.

Problema-4-c: $\boxed{\varphi_1 = 38.47^\circ}$ **es estable**

$\boxed{\varphi_2 = 141.525^\circ}$ **es inestable**

Problema-5
Planteamiento: Utilizando una señal de alta frecuencia de tipo triangular, plantear un esquema de linealización del sistema de control por relé (con $x_0 = 2$) y estudiar su dinámica.



El elemento relé del sistema no es linear. Se puede linear el sistema con un generador aplicando una señal del tipo alta frecuencia (A*f_a(wt). Si entonces entramos una señal f(t), sea constante o periódico, con frecuencia mas pequeña que la del generador, el sistema entera se comparte como si fuera un sistema lineal.

La señal de la del generador satisface la condición:

$$\tilde{f}_a\left[\omega \cdot \left(t + \tfrac{\pi}{\omega}\right)\right] = -\tilde{f}_a(\omega \cdot t)$$

La ganancia que equivale del relé se puede calcular con la formula siguiente:

caso general: $\boxed{y_m = \frac{2k_r}{\pi} \cdot f_a'\left(\frac{x_c}{A}\right)}$ caso aproximada: $\boxed{y_m = \frac{2k_r}{\pi} \cdot k_f \cdot \frac{x_c}{A}}$

donde k_r es la ganancia del rele, x_c es el valor de la señal de la entrada, A es la amplitud del generador, k_f es la pendiente de la tangente de $\ddot{f}_a$ en el punto x_c=0.

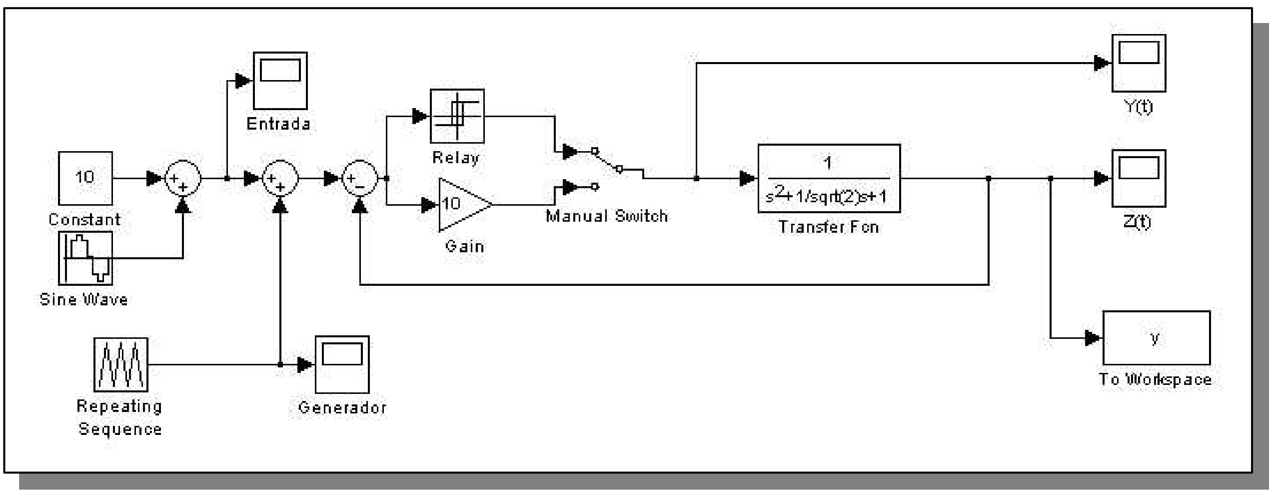
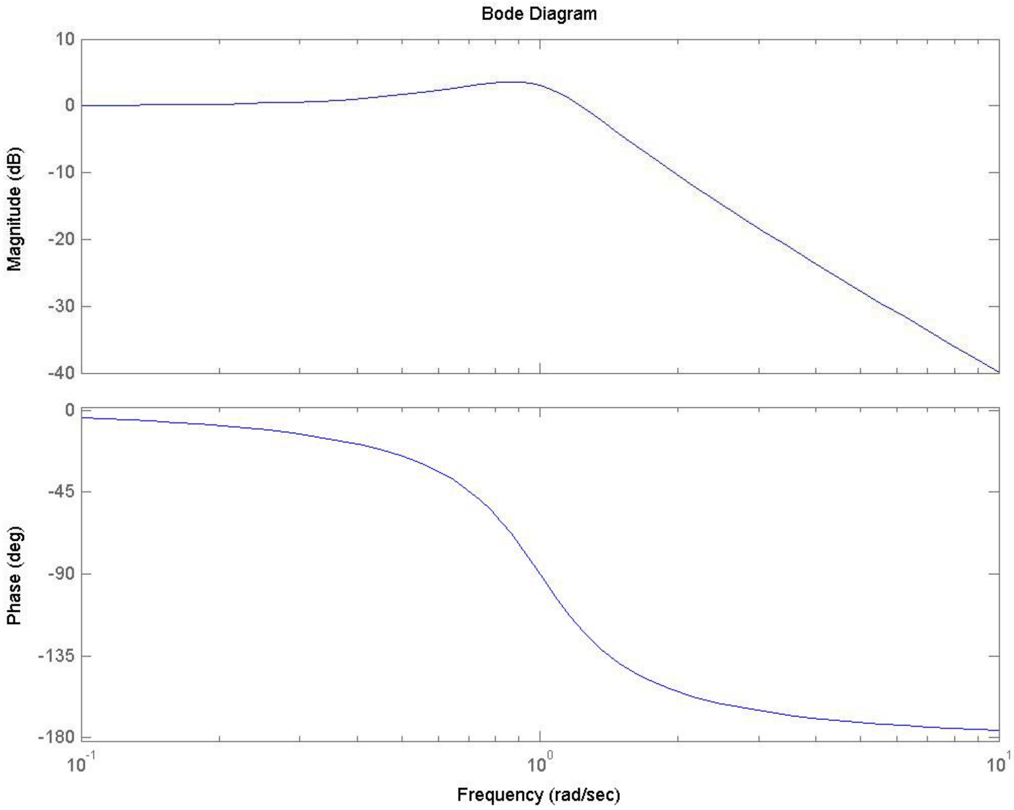


Fig.5.1: Sistema de control por relé con un generador (repeating sequence) resultando en una linearisación del sistema.

El diagrama de Bode de la planta W(s) muestra la magnitud (dB) y la desfase. La planta se comparta como un pasa bajo. Con una frecuencia mas grande que 10Hz la salida no esta influyendo de este señal.



El relé tiene histéresis y los valores ($k_r = 100$) y ($x_0 = 2$).
El generador (repeating sequence) en este ejemplo tiene una señal triangular con *f=50Hz*.
Con una señal constante (sin frecuencia) de valor C, la salida Z(t) se muestra una respuesta acostada. En vez del relé se puede poner un elemento proporcional con una ganancia y_m calculado con la formula siguiente:

$$y_m = \frac{2 \cdot 100}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{A} = \frac{100}{A}$$ **Ec. (5.1)**

Definimos el promedio de la salida P y el rizado de la salida, introducido por el generador, R.

Investigación 1: Examinación del sistema con relé y con su substitución con el elemento proporcional, variando la amplitud del señal triangular:
Frecuencia del señal triangular f = 50Hz, el señal de la entrada tiene el valor constante C = 10.
Después de estabilizarse, la salida entonces tiene un valor promedio y un valor de rizado.

Generador con relé:	**Generador con elemento proporcional:**

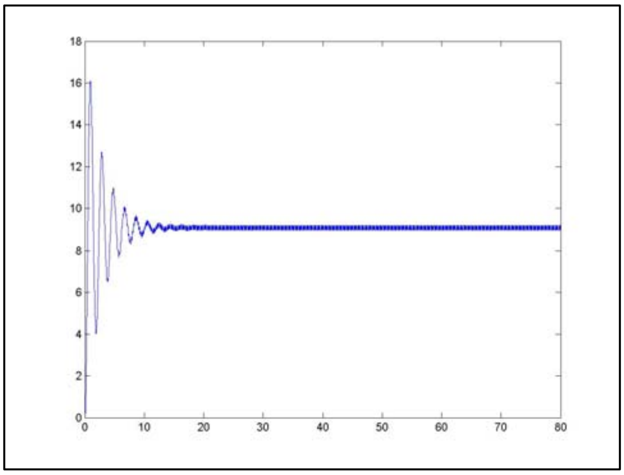
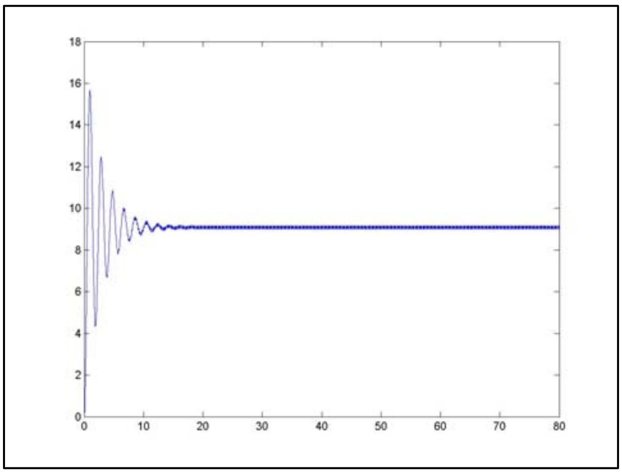

	

Fig: 5.3: A=10; => P=9.075; R=0.25	**Fig: 5.4**: A=10; y_m=10 => P=9.175; R=0.175

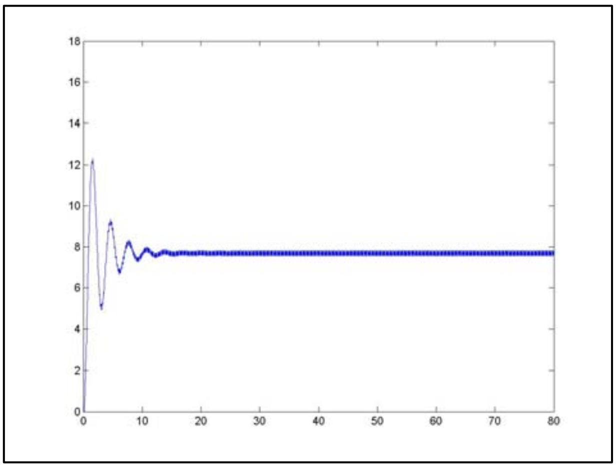
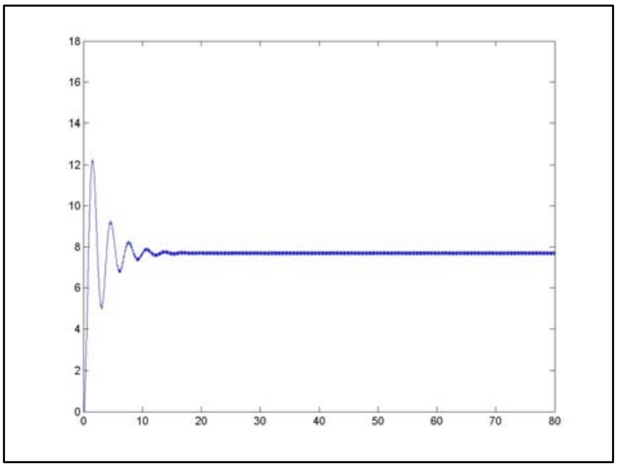

	

Fig: 5.5: A=30; => P=7.683; R=0.255	**Fig: 5.6**: A=30; y_m=3.33 => P=7.683; R=0.145

El sistema con el elemento proporcional con la ganancia y_m (Ec. 5.1) tiene una salida parecida del sistema con relé. Lo que llama la atención es que el rizado en el sistema con relé es mayor que en el sistema con elemento proporcional.

Investigación 2: En vez de la constante aplicamos un señal sen con la frecuencia 0.1rad/s, aplitute 10.

Generador con relé:	**Generador con elemento proporcional:**

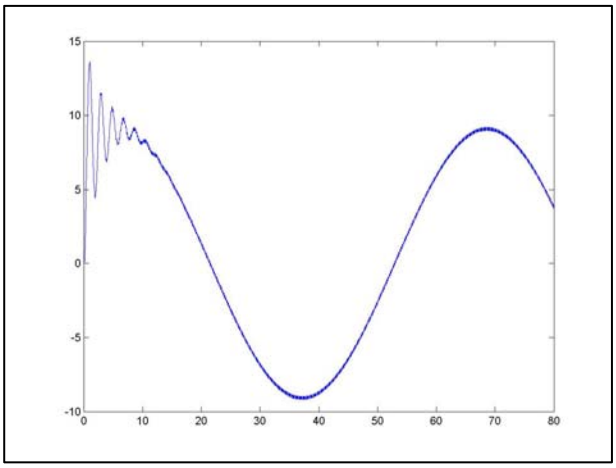
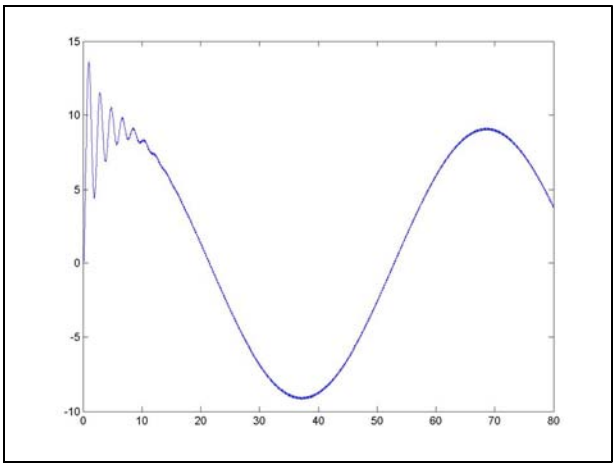

	

Fig: 5.7: A=10; => R=0.23	**Fig: 5.8**: A=10; y_m=10 => R=0.17

Los dos sistemas no tienen problemas con una frecuencia menor que la del señal triangular.
Es decir: si la frecuencia del generador (señal de triangular) tiene un valor tres veces mas grande que la de la entrada, la salida se comparte estable.

Investigación 3: Aumentando la frecuencia del generador (señal triangular), f=200Hz.
Señal de la entrada es la constante C=10:

Generador con relé:	**Generador con elemento proporcional:**

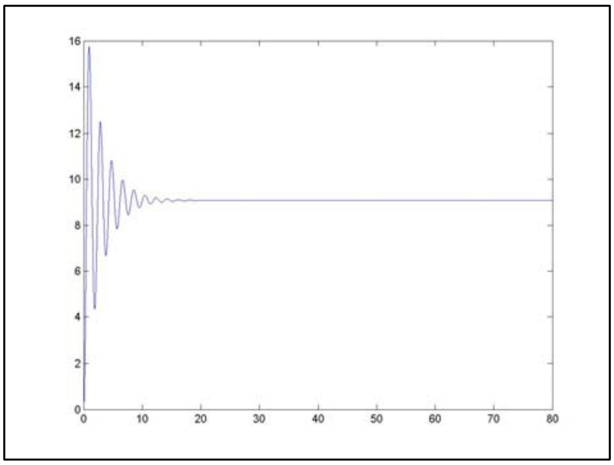
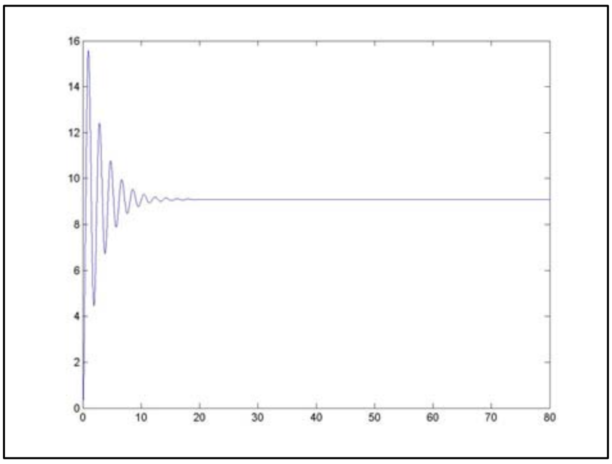

	

Fig: 5.9: A=10; => P=9.0908 R=0.007	**Fig: 5.10**: A=10; y_m=10 => P=9.0909 R=0.0004

Los dos sistemas entonces tienen menos rizado que antes. Una aumentación de la frecuencia del generador no se puede hacer infinitamente. La aumentación de la frecuencia es limitado por el relé que tiene una cierta frecuencia máxima, el tiempo de vida de este relé también sea bajado. Además, aunque la energía de cada cambio del estado no es mucho y menos que un control linear, aumentar la frecuencia resulta en que el sistema necesita mas energía (energía de calor).

Conclusión Problema-5:

Un sistema de control por relé se puede estabilizar mediante un señal alta frecuencia. En nuestro caso un señal triangular. Los valores de la frecuencia y de la amplitud tienen un rango amplio. En vez del relé se puede poner un elemento proporcional con la ganancia y_m (Ec 5-1). El comportamiento entonces es parecido. Si eliminamos el generador, usando el elemento proporcional, el rizado es cero. Aumentar la frecuencia del generador resulta en una salida mas suave, pero contiene limites dado por el relé.