11/03/02

Tema I Sistemas Lineales invariantes en el tiempo

I.I

$$\Sigma\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & (EE) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & (ES) \end{cases}$$

Es despreciable porque muy rara vez aparece.

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

$B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R} ;$$ vector de estado del sistema

$C \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m ;$$ vector de entrada (input)

$$y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p;$$ vector de salida (output)

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{existe } x \neq 0 \quad Ax = \lambda x\};$$

$$x \in \sigma(A) \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$$

(EE) y (ES) se dice que es la descripción de Σ (sistema) interno o por las variables de estado.

Aplicando laplace a $x(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$$\boxed{\begin{array}{l} s\hat{x}(s) - x_0 = A\hat{x}(s) = B\hat{u}(s) \\ y(s) = C\hat{x}(s) \end{array}}$$

suponiendo $x_0 = 0$;

$$(sI_n - A)\hat{x}(s) = B\hat{u}(s)$$

$$\hat{x}(s) = (sI_n - A)^{-1}B\hat{u}(s)(s \notin \sigma(A))$$

$$\hat{y}(s) = C(sI_n - A)^{-1}B\hat{u}(s)$$

$\boxed{G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B}$ matriz de transferencia de Σ.

$\boxed{\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)}$ vía experimental descripción externa.

$$G(s) = \begin{bmatrix} C_1^1 & \cdots & C_n^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ C_1^p & \cdots & C_n^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & s - a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & s - a_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^1 & \cdots & b_m^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1^n & \cdots & b_m^n \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{I}{\det(sI_n - A)} C \begin{bmatrix} adj_1^1 & adj_1^2 & \cdots & adj_1^n \\ \vdots & & & \\ adj_n^1 & adj_n^2 & \cdots & adj_n^n \end{bmatrix} B$$

adj es el determinante que se obtiene de suprimir la fila i y la columna j afectado de $(-1)^{i+j}$

$$\frac{adj_j^i \;\longrightarrow\; \text{grado} < n}{\det(sI_n - A) \;\longrightarrow\; \text{grado } n}$$

Fracción racional estrictamente propia.

I.2

$$\boxed{x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

suponiendo $t_0 = 0$;

$$e^{At} = I_n + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots$$

$$J = S^{-1}AS \text{ (Jordan de A)}$$

$$\text{Sí } J = \text{Diagonal} = \begin{bmatrix} \lambda_I & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} e^{A} = e^{SAS^{-1}} = s \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} s^{-1}$$

$$y(t) = C^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

I.3 Equivalencia algebraica

$\bar{x}(t) = Tx(t) \quad T \in Gl(n, \mathbb{R})$, matriz invertible

$$\dot{\bar{x}}(t) = T\dot{x}(t) = TAT^{-1}\bar{x}(t) + TBu(t)$$

$$y(t) = CT^{-1}\bar{x}(t)$$

$$\boxed{\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB, \bar{C} = CT^{-1}}$$

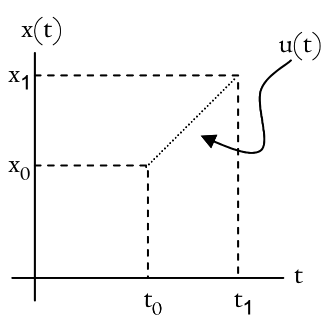
$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}\bar{x} \end{aligned}\right\} \bar{\Sigma}$$

Σ y $\bar{\Sigma}$ tienen la misma matriz de transferencia.

I.4 Controlabilidad

$$x(t) \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

supongamos un estado en 2 momentos



Σ es controlable si $\forall\ t_0 \langle t_1$ y $\forall\ x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ existe un control $u(t)$ tal que $x(t)$ calculado $u(t)$ verifique que $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\underbrace{e^{A(t_0-\tau)}}_{nxn}\underbrace{B}_{nxm}\cdot\underbrace{B^*}_{mxn}\underbrace{e^{A^*(t_0-\tau)}}_{nxn}d\tau$$; matriz Gauniana de controlabilidad

B^* = Transpuesta de B
A^* = Transpuesta de A

Teorema:

1.- Σ es controlable
2.- $W(t_0,t_1)$ es invertible $\Rightarrow \det\neq 0$
3.- rango $(B\, AB \cdots A^{n-1}B) = n$

Si $w(t_0,t_1)$ es invertible para un t_0,t_1 lo es para cualquier par t_0',t_1'

Cayley Hamilton

$$\text{rango}\,(B\ \ AB\ \cdots\ A^{n-1}B)=\text{rango}\,(B\ \ AB\ \cdots\ A^{n-1}B\ \ A^nB)$$

Si $Q_A(t)=\det(tI_n - A)=t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a^n$

$$\boxed{A^n+a_1A^{n-1}+a_2A^{n-2}+\cdots+a^nI_n=0\Rightarrow A^n=(I_n\ \ A\ \ A^{n-1})}$$

18/03/02

1.5 Sistemas no controlables, subsitemas controlables

$$\Sigma\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$$

$\sum$ es controlable $\Leftrightarrow$ rango $\underbrace{(B\ \ AB\ \cdots\ A^{n-1}B)}_{k} = r\langle n$

$x_0,x_1\in\mathbb{R}^n$

Lema:

Si (A,B) es controlable, entonces (TAT^{-1},TB) $T\in Gl(n,\mathbb{R})$, también lo es: (la controlabilidad se mantiene por cambios lineales de las variables de estado)

$C(TAT^{-1},TB)=(TB(TAT^{-1})TB)(T^2AT^{-1})(TB)\cdots(TA^{n-1}T^{-1})TB=$
$(TB\ \ TAB\ \ TA^2B\ \cdots\ T^{n-1}B)=T(B\ \ AB\ \ A^2B\ \ \cdots\ A^{n-1}B)\Rightarrow$ rang

$(TAT^{-1})(TAT^{-1})=TA^2T^{-1}$

rang $C(TAT^{-1},TB)=$ rang $C(A,B)$

$$TM \Rightarrow \text{rang } M = \text{rang } TM$$

invertible

$$\left(B \ \ AB \ \ A^2B \ \ \cdots \ \ A^{n\text{-}1}B\right): R^{nm} \to R^{n}$$

$I_m\left(B \ \ AB \ \ A^2B \ \ \cdots \ \ A^{n\text{-}1}B\right)$ a un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n : S$

dim S = r

S es invariante por A: Sí $x \in S \Rightarrow Ax \in S$

$$x = \left(B \ \ AB \ \ A^2B \ \ \cdots \ \ A^{n\text{-}1}B\right) = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} u^{11} \\ \vdots \\ u^{1m} \end{matrix}\right\} m \\ \vdots \\ u^{21} \\ \vdots \\ u^{2m} \\ \vdots \\ \left.\begin{matrix} u^{n1} \\ \vdots \\ u^{nm} \end{matrix}\right\} m \end{bmatrix} = B\underbrace{\begin{bmatrix} u^{11} \\ \vdots \\ u^{1m} \end{bmatrix}}_{u1} + AB\underbrace{\begin{bmatrix} u^{11} \\ \vdots \\ u^{1m} \end{bmatrix}}_{u2} + \cdots + A^{n-1}B\underbrace{\begin{bmatrix} u^{11} \\ \vdots \\ u^{1m} \end{bmatrix}}_{un}$$

$$Ax = AB_{u1} + A^2B_{u2} + \cdots + A^{n\text{-}1}B_{u1}$$

$$\boxed{An = l_0 I + l_1 A + \cdots + l_{n\text{-}1} A^{n\text{-}1}} \ \text{Cayley Hamilton}$$

$$l_0 B_{un} + l_1 AB_{un} + \cdots + l_{n-1} A^{n\text{-}1} B_{un}$$

$$\Rightarrow Ax \in S$$

$\left(V_1 \cdots V_1\right)$ base de S $\quad V_1 = \begin{bmatrix} V_{11} \\ \vdots \\ V_{1n} \end{bmatrix}$

$\left(V_1 \cdots V_r \cdots V_{r+1} \cdots V_n\right)$ base de $\mathbb{R}^n$

$T = \left(V_1 \cdots V_r \cdots V_n\right)$ invertible

cambiando de variable $\bar{x} = T^{-1}x$

$$A \to \bar{A} = T^{-1}AT \qquad \bar{A} = \text{matriz de A en la base T}$$
$$B \to \bar{B} = T^{-1}B$$
$$C \to \bar{C} = CT$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}$$

debido a que S es invariante por A

Teorema

1.- $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1)$ es controlable

2.- $\dot{\xi}(t) = \bar{A}_1\,\xi(t) + \bar{B}_1\,u(t)$ → subsistema controlable de Σ, tiene la misma matriz de transferencia que Σ

3.- $y(t) = \bar{C}\,\xi(t)$

Ejemplo, encontrar el subsistema controlable

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rango } k=1$$

$$\begin{array}{cccc} A & AB & A^2B & A^3B \end{array}$$

$$I_m k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = S$$

$$\text{base de } S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{base de } \mathrm{R}^{4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T$$

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

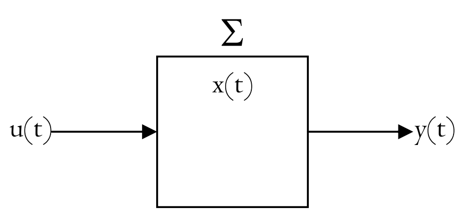
$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{A} = [1]$; $\bar{B} = [1]$; $\bar{C} = C \cdot T$; subsistema con r=1

I.6 Observabilidad

Dado Σ se dice que es observable si cualquier estado x_0 de t_0 se puede determinar de forma única a partir del conocimiento de $u(t)$ y $y(t)$ en $[t_0, t_1](t_1 \rangle t_0)$.



$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = Ce^{A(t-t_0)}x_0' + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

observable $\Leftrightarrow$ que la igualdad interior implique $x_0 = x_0'$

$$C^{A(t-t_0)}x_0 = C^{A(t-t_0)}x_0' \Rightarrow x_0 = x_0'$$

$$C^{A(t-t_0)}x_0 = C\left(In + \frac{A(t-t_0)}{1!} + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \cdots\right) = C + \frac{t-t_0}{1!}CA + \frac{(t-t_0)^2}{2!}CA^2 + \cdots$$

Teorema

$$\Sigma \text{ es observable si y solo si el rango de } \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de observabilidad de } \Sigma} = n$$

$$n = \text{rango}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} + \dim \text{nuc}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}; \qquad \text{nuc} = \text{nucleo}$$

$$\Sigma \text{ es observable sí y solo sí } \text{nuc}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = 0$$

Teorema

Si Σ_d es el sistema definido por:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{z}(t) = -A^* z(t) + C^* u(t) \\ w(t) = B^* z(t) \end{array}\right\} \text{dual de } \Sigma$$

entonces Σ es observable sí y solo sí Σ_d es controlable

$$C(-A^*, C^*) = (C^* \quad -A^*C^* \quad \cdots \quad -A^{*\,n-1}C^*) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^*$$

$$\sum_d \text{ controlable} \Rightarrow C(-A^*, C^*) = n \Rightarrow \text{rango}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \Rightarrow \sum \text{controlable}$$

I.7 Sistemas no observables

Si Σ no es observable $\Leftrightarrow \sum_d$ no es controlable

Si $\sum_{cd}$ de le subsitema controlable $\sum_d$, el dual de $\sum_{cd}$ es el subsistema observable de $\sum$

$$(A, B, C) \rightarrow (-A^*, C^*, B^*) \rightarrow (-\bar{A}_{11}^*, \bar{C}_{11}^*, \bar{B}_1^*) \xrightarrow[\text{donde}]{} (-\bar{A}_{11}, \bar{B}_{11}, \bar{C}_1)$$

08/04/02

Realización de sistemas (invariantes en el tiempo)

$$\begin{aligned} x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

$R \rightarrow C$

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

$B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$

$C \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L} \Rightarrow \underbrace{\hat{y}(s)}_{\text{entrada}} = \underbrace{C(sI_n - A)^{-1}B}_{\substack{\text{matriz de transferencia} \\ \text{racional estrictamente} \\ \text{propia}}} \cdot \underbrace{\hat{u}(s)}_{\text{salida}} \qquad \text{con } x_0 = 0$$

$$\hat{y}(s) = H(s) \cdot \hat{u}(s); \qquad H(\infty) = 0$$

En la práctica lo que se obtiene es:

$$\hat{y}(s) = H(s) \cdot \hat{u}(s)$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2 + 1} \\ \frac{s}{s^2 + 1} & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} = \frac{a(s)}{b(s)}; \quad \text{grad } a(s) \langle \text{ grad } b(s)$$

Problema: Existen matrices A,B,C de tamaños convenientes tales que:

$$\underbrace{H(s)}_{\text{dato}} = C(sI_n - A)^{-1}B$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{Fila} & \text{Columna} \\ C & p & n \\ B & n & m \\ A & n & n \end{array}$$

número de variables de estado de la relación, si este número es mínimo, la realización se se llama minimal

Entonces, sí existe A,B,C verificando $H(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$ existe una relación de H(s).

I) Realización controlable estándar

$p(s)$ = mínimo común múltiplo (mcm) (denominadores del elemento H(s))

Ejemplo:

Sí

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s^2-1} & \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} n = 3\,(\text{fila}) \\ m = 2\,(\text{columna}) \end{array} \qquad \therefore\ p(s) = s^2(s^2-1) \Rightarrow r = 4$$

$$\boxed{p(s) = p_0 + p_1 s + \cdots + p_{r-1}s^{r-1} + s^r}$$

$$p(s)H(s) = \begin{bmatrix} s(s^2-1) & s^2(s-1) \\ s^2 & s^2-1 \\ s^2(s+1) & s(s^2-1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{R_0} + s\overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{R_1} + s^2\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{R_2} + s^3\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{R_3}$$

En general:

$$\boxed{p(s)H(s) = R_0 + sR_1 + \cdots + s^{r-1}R_{r-1} \ ;\ R_i \in M_{p,m}(\mathbb{R})}$$

Una realización de H(s) viene dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & 0_m & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0_m & \ddots & 0_m \\ 0_m & 0_m & \cdots & 0_m & I_m \\ -p_0 I_m & -p_1 I_m & \cdots & \cdots & -p_{r-1} I_m \end{bmatrix} : mr \times mr$$

$$B=\begin{bmatrix}0_m\\ \vdots\\ 0_m\\ I_m\end{bmatrix}: mr \text{ x } m\,; \qquad C=\begin{bmatrix}R_0 & R_1 & \cdots & R_{r-1}\end{bmatrix}: p \text{ x } mr$$

$\boxed{\Rightarrow n = mr}$

Además (A,B,C) es controlable y se llama realización controlable estándar.

Retomando el ejemplo anterior tenemos que:

$$p(s) = -s^2 + s^4$$

$$\begin{aligned} p_0 &= 0\\ p_1 &= 0\\ p_2 &= -1\\ p_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0\\ \hline
0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0\\ \hline
0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1\\ \hline
0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0
\end{array}\right]; \qquad B=\left[\begin{array}{cc}
0&0\\ 0&0\\ \hline 0&0\\ 0&0\\ \hline 0&0\\ 0&0\\ \hline 1&0\\ 0&1
\end{array}\right];$$

$$C=\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0&0&-1&0&0&-1&1&1\\
0&-1&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&-1&1&0&1&1
\end{array}\right] \text{ (sugerencia, comprobar con HP)}$$

Controlable quiere decir que hay que hacer el rango $(B \;\; AB \;\cdots\; A^7B)$

$$\text{rang}\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1\\ \hline
0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0\\ \hline
0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0\\ \hline
1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right]=8$$

2) Realización observable estándar

Utilizaremos el mismo ejemplo de H(s), pero partido por $\frac{1}{s}$, es decir, en potencias de $\frac{1}{s}$.

Antes:

$$H(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s^2-1} & \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \circ\ \frac{1}{s} \\ \circ\ \frac{1}{s^2-1}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}+\frac{1}{s^6}+\cdots \\ \circ\ \frac{1}{s-1}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}+\cdots \end{array} \qquad \begin{array}{l} \circ\ \frac{1}{s+1}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}-\cdots \\ \circ\ \frac{1}{s^2} \\ \quad \frac{1}{s} \end{array}$$

Por lo que ahora H(s) se escribirá:

$$H(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}-\cdots \\ \frac{1}{s^2-1}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}+\frac{1}{s^6}+\cdots & \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s-1}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}+\cdots & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$H(s)=\frac{1}{s}\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{L_0}+\frac{1}{s^2}\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{L_1}+\frac{1}{s^3}\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{L_2}\text{¿}\frac{1}{s^4}\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{L_3}$$

Una realización de H(s) viene dada por:

$$A=\begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & \cdots & 0_p \\ 0_p & 0_p & I_p & 0_p & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0_p & \ddots & 0_p \\ 0_p & 0_p & \cdots\ 0_p & & I_p \\ -p_0 I_p & -p_1 I_p & \cdots & \cdots & -p_{r-1} I_p \end{bmatrix} : \text{pr x pr}$$

$$B=\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ \vdots \\ L_{r-1} \end{bmatrix} : \text{pr x m}\ ; \qquad C=\begin{bmatrix} I_p & 0_p & \cdots & 0_p \end{bmatrix} : \text{p x pr}$$

$$\boxed{\Rightarrow n = pr}$$

Además, esta realización es observable y se llama realización observable estándar.

$$A=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0
\end{array}\right]; \qquad B=\left[\begin{array}{cc}
1&1\\
0&0\\
1&1\\
\hline
0&-1\\
1&1\\
1&0\\
\hline
0&1\\
0&0\\
1&0\\
\hline
0&-1\\
1&0\\
1&0
\end{array}\right];$$

$$C=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right]$$

$$\text{rang}=\begin{bmatrix} C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}=\text{rang}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right]=pr$$

<u>El problema de la realización H(s) tiene solución y no es única.</u>

15/04/02

1.8 Realización Minimal, Grado de Mc-Millan.

R(s); p x m racional propia

Sabemos que existen (no únicas) A,B,C tales que

$$C(sI_n - A)^{-1}B = R(s)$$

(A,B,C) es una realización minimal si se cumple $C(sI_n - A)^{-1}B = R(s)$ con la "n" menor posible.

Obtención de una realización minimal

$$R(s) = \frac{1}{s}L_0 + \frac{1}{s^2}L_1 + \cdots; \qquad L_0, L_1, \cdots \in M_{pxn} \quad (\mathbb{R})$$

$$Hi = \begin{bmatrix} L_0 & L_1 & \cdots & L_i \\ L_1 & L_2 & \cdots & L_{i+1} \\ L_i & L_{i+1} & \cdots & L_{2i+1} \end{bmatrix} \quad \text{(Hankel)}$$

Lema

Sí (A,B,C) es una realización cualquiera de R(s) con "n" variables de estado, entonces:

$$\text{rang } H_{r\text{-}1} \leq n$$

$$C(sI_n - A)^{-1}B = \underbrace{\frac{1}{s}L_0 + \frac{1}{s^2}L_1 + \cdots}_{\text{conocido}} \approx CB + \frac{1}{s}CAB + \frac{1}{s^2}CA^2B + \cdots$$

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{s}I_n + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \cdots \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \underbrace{(sI_n - A)^{-1}\left(\frac{1}{s}I_n + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \cdots\right)} = I_n$$

$$\downarrow$$

$$I_n + \cancel{\frac{1}{s}}A - \cancel{\frac{1}{s}}A + \frac{1}{s^2}\cancel{A^2} - \frac{1}{s^2}\cancel{A^2} + \cdots$$

$$CB = L_0, CAB = L_1, \cdots \qquad \boxed{CA^kB = L_k} \quad \text{k=0,1,2,3,…,n}$$

$$H_{r-1} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{r-1}B \\ CAB & CA^2B & \cdots & CA^rB \\ \vdots & & & \vdots \\ CA^{r-1}B & \cdots & \cdots & CA^{2r-2}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{r-1}B \end{bmatrix}$$

$$\text{rang } H_{r\text{-}1} = \text{rang}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{r-1}B \end{bmatrix} \leq \min (*)$$

$$(*) = \left\{ \underbrace{\operatorname{rang}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix}}_{\leq n}, \underbrace{\operatorname{rang}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{r-1}B \end{bmatrix}}_{\leq n} \right\} \leq n$$

$$\boxed{\operatorname{rang} MN \leq \min \{\operatorname{rang} M, \operatorname{rang} N\}}$$

El rango es la dimensión de $N(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \operatorname{rang} N = \dim N(\mathbb{R}^n)$; (máximo número de columnas linealmente independientes)

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} MN = \dim MN(\mathbb{R}^n) &\leq \dim M(\mathbb{R}^m) = \operatorname{rang} M \\ &\leq \dim N(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Lema

El rango de H_{r-1} es el número de variables de estado del subsistema controlable de la realización observable estándar de R(s).

Corolario

Una realización minimal de R(s) es un subsistema controlable de la realización observable estándar.

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & \cdots & 0_p \\ 0_p & 0_p & I_p & 0_p & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0_p & \ddots & 0_p \\ 0_p & 0_p & \cdots & 0_p & I_p \\ -p_0 I_p & -p_1 I_p & \cdots & \cdots & -p_{r-1} I_p \end{bmatrix}; B \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ \vdots \\ L_{r-1} \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} I_p & 0_p & \cdots & 0_p \end{bmatrix}; n = pr$$

El número de variables de estado del subsistema controlable de (A,B,C) es:

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{r-1}B \end{bmatrix} \overset{?}{=} H_{r-1} &= \operatorname{rang} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix}}_{In} \cdot \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{r-1}B \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rang}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{r-1}B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Producto tensorial de matrices

$$I_n = I_r \otimes I_p$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_1^1 B & a_2^1 B & \cdots & a_n^1 B \\ a_1^2 B & \cdots & \cdots & a_n^2 B \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^m B & \cdots & \cdots & a_n^m B \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & -8 & -2 \\ \hline -3 & 6 & -1 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 3 \\ 12 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & \cdots & -p_{r-1} \end{bmatrix} \otimes I_p$$

$$I_n = I_r \otimes I_p$$

$$((A \otimes B)(A' \otimes B')) = (AA') \otimes (BB')$$

$$t^r + P_{r-1} t^{r-1} + \cdots + P_0 = \text{polinomio característico de } A_0$$

$$P_0 I_r + P_1 A_0 + P_{r-1} A_0^{\ r-1} + A_0^{\ r} = 0$$

$$P_0 I_n + P_1 A + \cdots + P_{r-1} A_0^{\ r-1} + A^r = P_0 I_r \otimes I_p + P_1 A_0 \otimes I_p + P_2 A_0^{\ 2} \otimes I_p + \cdots +$$

$$P_{r-1} A_0^{\ r-1} \otimes I_p + A_0^{\ r} \otimes I_p = (P_0 I_r + P_1 A_0 + P_{r-1} A_0^{\ r-1} + A_0^{\ r}) \otimes I_p = 0$$

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^r B \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{r-1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{r+1} B \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$R(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2 - 1} \\ \dfrac{-1}{s+1} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad 1^0$$

$p(s) = s^2 - 1$

$p = 2$	$p_0 = -1$
$m = 1$	$p_0 = 0$
$r = 2$	$n = ?$

$$R(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}+\frac{1}{s^3}+\cdots\\ -\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\cdots\end{bmatrix}=\frac{1}{s}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\cdots$$

2º

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

Ahora buscaremos el sistema controlable

$$\begin{array}{c}k=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&1&-1&1\\0&1&0&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix};\quad \text{rango } k=2\\ \begin{array}{cccc}A & AB & A^2B & A^3B\end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}S=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&1&0&1\\0&1&0&0\\1&-1&0&0\end{bmatrix};\quad \text{rango } S=4\\ \begin{array}{cc}A & AB\end{array}\end{array}$$

$$S^{-1}AS=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&0&-1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix};\quad S^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&1&0&1\end{bmatrix};\quad \left[\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}}_{A},\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{B},\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}}_{C}\right]$$

$R(s) \in p \times m$

Realización minimal.- un subsistema controlable de la relación observable estándar.

Proposición: una realización (A,B,C) de R(s) es minimal sí y solo sí es controlable y observable.

Demostración

Si (A,B,C) no es controlable no puede ser minimal.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Supongamos que (A,B,C) es real, controlable y observable de R(s)} \\ (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) \text{ una realización cualquiera de R(s), } \bar{A} \in M_{\bar{n},\bar{n}}\end{array}\right\} n \leq \bar{n}?$$

$$C(sI_n - A)^{-1}B = C(sI_n - A)^{-1}\bar{B} = R(s) \Rightarrow CA^iB = \bar{C}\bar{A}^i\bar{B} \quad i = 0,1,2,...$$

$$k = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \qquad k_1 = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad L_1 = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \overline{CA} \\ \vdots \\ \overline{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$LK = \begin{bmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \cdots & CA^nB \\ \vdots & & & \vdots \\ CA^{n-1}B & \cdots & \cdots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix} = L_1K_1$$

$\mathbb{R}^{mxn} \xrightarrow{k} \mathbb{R}^{n} \xrightarrow{L} \mathbb{R}^{mxp}$ rang k = n = rang L(contol y obser)

$\mathbb{R}^{mxn} \xrightarrow{k_1} \mathbb{R}^{n} \xrightarrow{L_1} \mathbb{R}^{pxn}$ dim ker L=n–rang L = 0 $\Rightarrow$ L inyectiva

rang LK = rang $L_1K_1 \leq \bar{n}$

||

dime $LK(\mathbb{R}^{mxn}) = n$

Genericidad

Genérico implica que se cumple "casi siempre" (se cumple para todos los valores del complementario de una variedad lineal)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{invertible} \Rightarrow \det \neq 0$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 2 \text{ genéricamente}$$

La idea de esto es que el ser minimal es genérico

I.9 Realimentación de estado

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, puedes realimentar a través del estado o de la salida, realimentar = cambiar la entrada

$y(t) = Cx(t)$ por estado, son importantes para la estabilidad

$r(t) = u(t) - Fx(t), \ \ F \in M_{mxn}$

sistema realimentado, $\dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t) + BFx(t) = (A + BF)x(t)Br(t)\,(\Sigma\, r)$

$$\boxed{A} \longrightarrow \boxed{A + BF}$$

Proposición

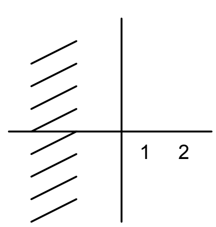
Σ controlable $\Rightarrow \Sigma r$ controlable

$$\text{rango}\,(B \ \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B) = n \ \ (\Sigma \text{ controlable})$$
$$\text{rango}\,(B \ \ (A + BF)B \ \cdots \ (A + BF)^{n-1}B) = n \ \ (\Sigma \text{ controlable})$$

Σ estable si λ es valor propio de A $(\lambda \in \mathbb{C})$, $R \in \lambda < 0$

Supongamos que Σ no es estable, ¿puede estabilizarse mediante una conveniente relación de estado?
Respuesta: Sí (y solo sí) Σ es controlable

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, no controlable

$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, controlable

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\overbrace{(x,y)}^{F}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ x & 2+y\end{bmatrix}$$

Si quiero

-1+i
-1-i

$$\lambda^2-(2+y)\lambda+2+y-x=(\lambda+1-i)(\lambda+1+i)$$
$$=\lambda 2+2\lambda+2$$

-2-y=2
2+y-x=2 x=y=-4

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\overbrace{(x,y)}^{F}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+x & 1+y\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

Siempre tiene este valor propio, no se puede cambiar por lo que no hay garantías para controlar

29/04/02

Asignación de valores propios por realimentación de estado

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)$$

de k tal que A+BK tenga valores propios arbitrarios λ(A,B) no controlable $\Rightarrow$ puede no haber solución.

A+BK n x n (real) $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n)$; $\lambda_i \in \mathbf{C}$

Q(t) coeficientes reales $\Rightarrow$ si λ es raíz también lose s $\bar{\lambda}$

Teorema

Si (A,B) es controlable y $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n)$; $\lambda_i \in \mathbf{C}$ es arbitrario verificando $\lambda=\bar{\lambda}$ entonces existe k tal que $\sigma(A+BK)=\lambda$

1

m = 1

$$B = b\begin{bmatrix} b \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Lema

Si (A,B) es controlable, existe $T \in \sigma\lambda(n, \mathrm{R})$ tal que

$$\overline{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = Tb = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rango}(b \;\; Ab \;\cdots\; A^{n-1}b) = n \Rightarrow \operatorname{rango}(b \;\; Ab \;\cdots\; A^{n-1}b) \text{ es invertible}$$

t es la última fila de $(b \;\; Ab \;\cdots\; A^{n-1}b)^{-1}$

$$T = \begin{bmatrix} t \\ tA \\ \vdots \\ tA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Supongamos

$$\lambda_0 t + \lambda_1 tA + \cdots + \lambda_{n-1} tA^{n-1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} * \\ t_1 \cdots t_n \end{bmatrix}(b \;\; Ab \;\cdots\; A^{n-1}b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = In$$

$$\begin{gathered} tb = 0 \\ tAb = 0 \\ \vdots \\ tA^{n-1}b = 1 \end{gathered}$$

multiplicando por b por la derecha tenemos

$$
\begin{array}{lcccc}
 & \lambda_0 tb & +\lambda_1 tAb & +\cdots+ & \lambda_{n-1} tA^{n-1}b = 0 \\
 & || & || & & || \\
\lambda_{n-1} = 0 & 0 & 0 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccc}
 & \lambda_0 tAb & +\lambda_1 tA^2 b & +\cdots+ & \lambda_{n-2} tA^{n-1}b = 0 \\
 & || & || & & || \\
\lambda_{n-2} = 0 & 0 & 0 & & 1
\end{array}
$$

etc., por lo tanto es invertible.

$$
Tb = \begin{bmatrix} t \\ tA \\ \vdots \\ TA^{n-1} \end{bmatrix} \cdot b = \begin{bmatrix} tb \\ tAb \\ \vdots \\ TA^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
(A, B) \to (\bar{A}, \bar{B}) \qquad \bar{b} = (\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)
$$

$$
\bar{A} + \bar{b}\bar{k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n]}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k1 & k_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1}+kn \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 + k_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} + k_1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz compañera}}
$$

$$
Q_{\bar{A}+\bar{b}\bar{k}}(t) = t_n - (a_{n-1} + \bar{k}_n)t^{n-1} - (a_{n-2} + \bar{k}_{n-1})t^{n-2} - \cdots - (a_0 + \bar{k}_1) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\cdots(t - \lambda_n)
$$

$$
A + bk = T^{-1}\bar{A}T + T^{-1}\bar{b}\bar{k}T = T^{-1}(\bar{A} + \bar{b}\bar{k})T \Rightarrow \sigma(A + bk) - \Lambda
$$

Ejemplo numérico

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

calculamos k

$$k = \begin{array}{c} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}} \\ \begin{array}{ccc} A & AB & A^2B \end{array} \end{array}; \quad \text{obtenemos } k^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

calculamos $t = \begin{pmatrix} \frac{1}{-14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$, calculamos $T = \frac{1}{14}\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 9 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} t \\ tA \\ tA^2 \end{array} \end{array}$

la último fila de k^{-1}

Supongamos $\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; sacamos $\overline{A} + \overline{b}\overline{k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1+a & 3+b & 2+c \end{bmatrix}$

Ahora suponemos $\Lambda = \{-1 \quad ,1+i \quad ,1-i\}$ (a lo que forzamos)

$$Q_{\overline{A}+\overline{b}\overline{k}}(t) = t^3 - (2+c)t^2 - (3-b)t - 1 - a = \underbrace{(t-1)(t-1-i)(t-1+i)}_{\text{a lo que queremos forzar}}$$
$$= t^3 - t^2 + 2$$

$$\left.\begin{array}{r} -2-c=1 \\ -3-b=0 \\ 1-a=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-1 \\ b=-3 \\ c=-1 \end{array}$$

$k = \overline{k}t$
$k = (-1 \quad -3 \quad -1)T$

Ejemplo valores propios

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix} \qquad \det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ -a & -b & t-c \end{vmatrix} = t^3 - ct^2 - a - bt$$

2

m>1 Si b_1 fuera cero hay que hacer otra cosa, es muy raro.

Sea $b_1 \neq 0$ (1^a columna de b)

Sea k^1 tal que $(A + Bk_1, b_1)$ es controlable.

Para obtener k^1

$$k = (\overbrace{b_1 \cdots b_m}^{B} \quad \overbrace{Ab_1 \cdots Ab_m}^{AB} \quad \overbrace{A^{n-1}b \cdots A^{n-1}b_m}^{A^{n-1}B}), \text{ tiene rango n}$$

reordenarla

$b_1 \quad Ab_1 \quad A^{r-1}b_1$ linealmente independientes $\quad b_1 \quad Ab_1 \quad A^{r}b_1$ linealmente dependientes

$b_1 \quad Ab_1 \quad A^{r-1}b_1 \quad b_2 \quad Ab_2 \quad A^{r2-1}b_2 \quad 1$ ind $\quad b_1 \quad A^{r2}b_2 \quad 1$ dep

$b_q \quad Ab_q \quad \cdots \quad (b_1 \quad Ab_1 \quad A^{r-1}b_1 \quad b_2 \quad Ab_2 \quad A^{r2-1}b_2 \quad \cdots \quad b_q \quad Ab_q \quad A^{rq-1}b_q) = P$

$r_1 + r_2 + \cdots r_q = n$

$$E = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & 1 & & 0 & & 0 & \\ & 0 & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 0 & \\ 0`s & & & & 0`s & 0 & 0`s \\ & \vdots & & \vdots & & 1 & \\ & \vdots & & \vdots & & 0 & \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & & \vdots & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccccc} & r_1 & & r_1 + r_2 & & r_1 + r_2 + r_{q-1} & \end{array} \end{array}$$

$$\boxed{k^1 = EP^{-1}}$$

existe k_2 tal que $\sigma(A + Bk_1 + b_1k_2) = \Lambda$ $\qquad k=k_1+k_2$

$$k_2 = \begin{bmatrix} k_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6/05/02

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \Lambda = \{-1, 1, 2\}$$

primero hay que obtener la matriz de controlabilidad

$$k = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right], \text{ tiene rango } 3 \therefore (A, B) \text{ es controlable}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{calculamos} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{calculamos } k_1 = EP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

calculando el determinante tenemos que 1- 4 = 3 = rang , $\therefore$ es linealmente independiente, si esto no fuera cierto habría que continuar con la siguiente columna de k.

$$k \qquad \sigma(A + Bk) = 1$$

$$(A + Bk_1 + b_1) = \text{controlable}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A + Bk_1 = A_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = C(A + Bk_1, b_1); \quad T = \begin{bmatrix} t \\ TA_1 \\ TA_1^2 \end{bmatrix}; \quad k_2 = \cdots$$

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} & k_2 & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{K_2} \qquad \sigma\left(A_1 + \underbrace{b_1 k_2}_{BK_2}\right) = \Lambda$$

$$A + Bk_1 + Bk_2 = A + B(k_1 + k_2)$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\3 & 5 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\3 & 5 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

1.10 Observadores

$$\Sigma\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$$

es medible

Un observador de Σ es un sistema cuyo estado $Z(t)$ aproxima $x(t)$ en el sentido que:

$$\lim_{t\to\infty}(Z(t)-x(t))=0$$

Hay 2 tipos de Observadores

Observador de orden mínimo
Observador de orden máximo

Observador de orden máximo

$$\dot{Z}(t)=\underset{?}{J}z(t)+\underset{?}{K}y(t)+Bu(t)$$

$e = x - z \to 0$ si $t \to \infty$

Proposición

Si (C,A) es observable y λ c $\mathbb{C}$ tal que

$|\lambda = n|,\quad \lambda=\lambda^{*}$ existe k tal que $\sigma(A - KC)=\lambda$

Si (C,A) es observable $\Rightarrow (A^{*},C^{*})$ controlable $\Rightarrow \sigma(A^{*}+C^{*}H)=\lambda$

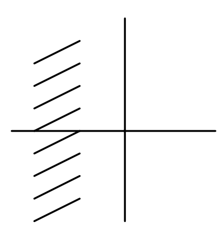
$$\|$$

$$\sigma(A^{*}+H^{*}C)$$

$$\|$$

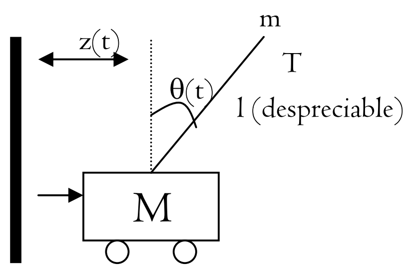
$$k=-\sigma(A^{*}+H^{*})$$

$$\begin{cases}J=A-kC\\ k \quad \text{lo encontrado siendo } \lambda \text{ c } \mathbb{C}^{-}\end{cases}$$



$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{z} = Ax(t) + Bu(t) - Jz(t) - ky(t) - Bu(t)$$
$$= Ax(t) - Az(t) + kCz(t) - \underbrace{ky(t)}_{-kCx(t)}$$
$$= Ae + kCe = (A - kC)e = Je \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} e(t) = 0$$

Ejemplo



$$\left.\begin{aligned} u - T\sin\theta &= M\ddot{z} \\ T\sin\theta &= m\frac{d^2}{dt^2}(z + l\sin\theta) \\ mg - T\cos\theta &= m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta) \end{aligned}\right\}$$

No lineal, para

θ y $\dot{\theta}$ pequeñas $\sin \geq 0 \; \cos \cong 1$

$$(M + m)\ddot{z} - m\ddot{z} = u - mg$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{z} &= -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u \\ \ddot{\theta} &= \frac{M+m}{lM}g\theta - \frac{1}{Ml}u \end{aligned}\right\}\Sigma$$

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}; \quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{M+m}{lM}g & 0 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}}_{B} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM} \end{bmatrix}u$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix},$$ por que la z es la más fácil de calcular

1° ver si (C,A) es observable

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{M+m}{1M}g & 0 \end{bmatrix}, \text{ tiene rango 4 } \therefore \text{ es observable}$$

2º calcular el observador

$$\overset{\bullet}{Z}(t) = Jz(t) + Ky(t) + Bu(t)$$

$$\sigma(A - kC) = \{-2, -3, -2+i, -2-i\}$$

supongamos

$$M = 1\text{ Kg},\ m = 0.1\text{ Kg},\ 1 = 1\text{m}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3º calcular k

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}}_{A^* = A^T} \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{C^*} \qquad k = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

$$A^* + C^* h = A^* + \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fórmula polinomio característico matiz

$$\lambda^4 - \alpha\lambda^3 + (-\beta - 11)\lambda^2 + (11\alpha + \gamma)\lambda + 11\beta + \delta = (\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+2-i)(\lambda+2+i)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -9 \\ \beta &= -42 \\ \gamma &= 148 \\ \delta &= 464 \end{aligned} \qquad k = \begin{bmatrix} -9 \\ -42 \\ 148 \\ 464 \end{bmatrix}$$

$$J = A - kC = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 & 0 \\ -42 & 0 & -1 & 0 \\ 148 & 0 & 0 & 1 \\ 464 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \text{observador} = \dot{z} = Jz - \begin{bmatrix} -9 \\ -42 \\ 148 \\ 464 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{e} = Je$$

$$T^{-1}JT = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{(-2+j)t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(-2+j)t} \end{bmatrix}, \text{ tiende a 0 a velocidad } e^{-2t} = \frac{1}{e^{et}}$$

27/05/02

Observador dinámico de orden mínimo

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$\dot{Z}(t) = \cdots\cdots \qquad Z(t) \approx x(t)$$

$Z(t)$ - $x(t) \to 0$ $\quad t \to \infty$

n $\quad$ n (variables) $\quad$ n — p variables de estado que se pueden conocer, solo necesitamos aproximarlas

$$y = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \quad C;\ p \times n \qquad p \le n$$

Hipótesis (genérica)

rang C = p (máximo)

$$T = \underset{n}{\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix}} \begin{matrix} n-p \\ p \end{matrix}$$

la D más fácil que se encuentre para que sea invertible

$$\bar{x} = Tx \qquad \text{si } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} D \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} C \end{matrix} \quad \text{invertible}$$

$$y = CT^{-1}\bar{x}$$

$$CT^{-1} = C\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix}^{-1} = [\overbrace{X_1}^{n-p}\ \overbrace{X_2}^{p}]\,p = [0 \quad I_p]$$

p filas n columnas

$$C = [X_1 \quad X_2]\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix} = X_1 D + X_2 C$$

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = I_p$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \underbrace{1 \quad 0}_{} \\ 0 & \underbrace{0 \quad 1}_{I_2} \end{bmatrix}$$

Determinables experimentalmente

$$y = [0 \quad I_p]\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{n-p+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$ solo es necesarios aproximar $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{n-p}$

supongamos $C = [0 \ \ I_p]$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, n-p \\ \}\ \ p \end{matrix}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, n-p \\ \}\ \ p \end{matrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u, \ y = [0 \quad I_p]\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \qquad \boxed{y = X_2}$$

$$x \cong \bar{x}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = A_{11}X_1 + \underbrace{A_{11}X_2 + B_1 u}_{V} = A_{11}X_1 + \underbrace{A_{12}y + B_1 u}_{V} \\ Z = A_{21}X_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + B_2 u \\ Z = \dot{y} - A_{22}y - B_2 u \end{cases}$$

Lema

$$\text{Si } \left(\begin{pmatrix} 0 & I_p \end{pmatrix}, A\right) \text{observable} \Rightarrow \left(A_{21}, A_{11}\right) \text{ es observable}$$

$$\text{rang}\begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{21}A_{11} \\ A_{21}A^{2}{}_{11} \\ A_{21}A^{n-p-1}{}_{11} \end{bmatrix}$$

Hipótesis

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & I_p \end{pmatrix}, A\right) \text{ es observable}$$

podemos aplicar el método anterior al sistema

$$\left.\begin{aligned} \dot{X}_1 &= A_{11}X + V \\ Z &= A_{21}X_1 \end{aligned}\right\}$$

$$\dot{\hat{X}}_1 = \left(A_{11} - kA_{12}\right)\hat{X}_1 + kz + V; \quad \text{k tal que } \sigma\left(A_{11} - kA_{12}\right) \subset \mathbb{C}^{-}$$

espectro

$$\dot{\hat{X}}_1 = \left(A_{11} - kA_{12}\right)\hat{X}_1 + k\left(\dot{y} - A_{22}y - B_2u\right) + V$$

derivadas de salida (matemáticamente correcta pero inadecuada)

$$w + \hat{X}_1 - ky$$

$$\dot{w} = \dot{\hat{X}}_1 - k\dot{y} = \left(A_{11} - kA_{12}\right)\left(w + ky\right) + k\left(\dot{y} - A_{22}y - B_2u\right) + A_{12}y + B_1u - k\dot{y} =$$

$$\left(A_{11} - kA_{12}\right)w + \left(A_{11} - kA_{12}\right)ky - kA_{22}y - kB_2u + A_{12}y + B_1u =$$

$$\boxed{\dot{w} = \left(A_{11} - kA_{12}\right)w + \left(B_1 - kB_2\right)u + \left(\left(A_{11} - kA_{12}\right)k - kA_{22} + A_{12}\right)y}$$

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w + ky \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix}$$

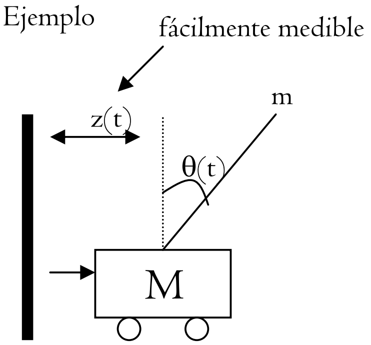
$$X_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{e} = A_{11}X_1 + A_{12}y + B_1u - \left(A_{11} - kA_{21}\right)\hat{X}_1 - kA_{21}X_1 - A_{12}y - B_1u$$
$$\dot{e} = \underbrace{\left(A_{11} - kA_{21}\right)}_{J}\underbrace{\left(X_1 - \hat{X}_1\right)}_{e}$$

$$e = \left(X_1 - \hat{X}_1\right), \qquad \sigma(J) \subset C^-$$

$$w \to \hat{X}_1 = w + ky \approx X_1$$

Ejemplo



supongamos

$$M = 1\ \text{Kg},\ m = 0.1\ \text{Kg},\ l = 1\text{m}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$x = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ z \end{bmatrix}$$ Sólo necesitamos observadores para estas 3

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x = z$$

con esta C obtenemos z

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{22} = 0$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad B_2 = 0$$

ordenada

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A_{11} - kA_{12}) = \{-3,\ -2+i,\ -2-i\}$$

$$k = \begin{bmatrix} 7 \\ -28 \\ -92 \end{bmatrix}$$

$$\dot{w} = \underbrace{\left(\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}}^{A_{11}} - \begin{bmatrix} 7 \\ -28 \\ -92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)}_{\xi} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \xi \begin{bmatrix} 7 \\ -28 \\ -92 \end{bmatrix} y$$

$$k = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \\ \gamma & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^3 + \alpha\lambda + (11-\beta)\lambda - \gamma - 11\alpha = (\lambda+3),(\lambda+2-i)(\lambda+2+i)$$

I.11 Observadores y Realimentación de Estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Maximal

(A,B) controlable $\Rightarrow \exists$ F tal que $\sigma(A+BF)$ sea arbitrario

$r = u - Fz$

aproximación de x desde

$$\dot{Z}(t) = Jz(t) + Ky(t) + Bu(t) \qquad J = A - kC$$

$$y = Cx; \quad \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \text{observable} \quad \sigma(J) \subset \mathbb{C}^- \Rightarrow e = x - z \to 0 \text{ si } t \to \infty$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + Br + BFz \\ kCx + Br + BFz + Jz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BF \\ KC & J + BF \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF & -RF \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (\Theta)$$

$$\dot{x} = Ax + Br + BFx - BFe = (A + BF)x - BFw + Br$$

$$\dot{e} = Je$$

$$\begin{bmatrix} A & BF \\ kC & J + BF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A + BF & BF \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & BF \\ \underbrace{A - J}_{kC} & BF + J \end{bmatrix}$$

$$\sigma\begin{bmatrix} A & BF \\ A - J & BF + J \end{bmatrix} = \sigma\begin{bmatrix} A + BF & BF \\ 0 & J \end{bmatrix} = \sigma(A + BF) \cup \sigma(J)$$

(Θ) es estable si $\sigma\begin{bmatrix} A+BF & BF \\ 0 & J \end{bmatrix} \subset \mathbb{C}^-$ y esto pasa si $\underbrace{\sigma(A+BF)}\subset \mathbb{C}^-$ y $\sigma(J) \subset \mathbb{C}^-$

si (A,B) es controlable o más generalmente si (A,B) estabiliza

Minimal

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y = [0 \quad I] \qquad\qquad x = xz$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n-p \\ \}\ \ p \end{matrix}$$

$$\dot{\hat{X}}_1 = (A_{11} - kA_{21})\hat{X}_1 + kA_{21}X_1 + A_{12}X_2 + B_1 u$$

$$z = A_{21}X_1$$

$$2n \quad \begin{bmatrix} X \\ z \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_z \\ \hat{X}_1 \end{bmatrix} n + n - p = 2n - p$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \hat{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + B_1\left(F_1\hat{X}_1 + F_2X_2\right) \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + B_2\left(F_1\hat{X}_1 + F_2X_2\right) \\ (A_{11} - kA_{21})\hat{X}_1 + kA_{21}X_1 + A_{12}X_2 + B_1\left(F_1\hat{X}_1 + F_2X_2\right) \end{bmatrix}$$

$$u = F\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = [F_1 \quad F_2]\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1\hat{X}_1 & F_2X_2 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{11} + B_1F_2 & B_1F_1 \\ A_{21} & A_{22} + B_2F_2 & B_2F_1 \\ kA_{21} & A_{12} + B_1F_2 & A_{11} - kA_{21} + B_1F_1 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \hat{X}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -I & 0 & I \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & I \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hphantom{A_{11}+B_1F_1 \quad A_{12}+B_1F_2}}^{A+BF}} & \\ A_{11}+B_1F_1 & A_{12}+B_1F_2 & B_1F_1 \\ A_{21}+B_2F_1 & A_{22}+B_2F_2 & B_2F_1 \\ 0 & 0 & A_{11}-kA_{21} \end{array}\right]$$

$\sigma(M) = \sigma(A+BF) \cup \sigma(A_{11} - kA_{21}) \subset \mathbb{C}^-$ ya que $\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}$ es observable si (A, B) es obsevable

I.12 El DDF (Disturbance Decoupling Problem)

$$\dot{x} = Ax + Bu + Sq$$

$$[B \quad S] \begin{bmatrix} u \\ q \end{bmatrix} \text{indeseable}$$

entrada

$$x = Dx$$

Problema

Existe una realimentación u=Fx tal que el sistema

$$\dot{x} = (A+BF)x + Sq$$
$$z = Dx, \quad z \text{ no depende de } q?$$

$$x(t) = e^{(A+BF)t}_{x_0} + \int_0^t e^{(t-\tau)(A+BF)} Sq(\tau) d\tau$$

$$z(\tau) = e^{(A+BF)t}_{x_0} + \underbrace{D\int_0^t e^{(t-\tau)(A+BF)} Sq(\tau) d\tau}_{\substack{\| \\ 0!}}$$

DDP tiene solución si existe F tal que $D\int \cdots = 0$

$(=) \int_0^t \cdots, \quad \subset \ker D$ (pertenece al nucle de D)

$$e^{(t-\tau)(A+BF)} = I_{11} + (t-\tau)\frac{(A+BF)}{1!} + (t-\tau)^2\,\frac{(A+BF)}{2!} + \cdots$$

$$Sq(\tau) \in I_m\ \mathsf{S}$$

$$\begin{bmatrix} s_1^1 & \cdots & s_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ s_1^n & \cdots & s_r^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_r \end{bmatrix} = q_1\begin{bmatrix} s_1^1 \\ \vdots \\ s_1^n \end{bmatrix} + \cdots + q_r\begin{bmatrix} s_r^1 \\ \vdots \\ s_r^n \end{bmatrix}$$

$$Sq(\tau) = S(\tau)$$

$$\int_0^t Sq(\tau) + (A+BF)Sq_1(\tau) + (A+BF)^2\,Sq_2(\tau) + \cdots d\tau$$

$$= sl_0(t) + (A+BF)sl_1(t) + (A+BF)^2\,sl_2(t) + \cdots$$

$$(A+BF)^n = 1\big[I_n,\quad \cdots,\quad (A+BF)^{n-1}\big]$$

$$D\big(Sl_0(t) + (A+BF)Sl_1(t) + \cdots\big) = 0 \Leftrightarrow \varsigma + (A+BD)\varsigma + \cdots + (A+BF)^{n-1}\,s$$

$$\varsigma \text{ c } \ker D \qquad\qquad \varsigma = I_m\ \mathsf{S}$$

Teorema, el DDP tiene solución si

$$\varsigma + (A+BD)\varsigma + \cdots + (A+BF)^{n-1}\,s \text{ c } \ker D$$

17/06/02

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Sq(t)$$
$$y(t) = Dx(t) \qquad\qquad D \cong C$$

Problema

Encontrar F tal que

$u = Fx$ y $x(t)$ es la solución de $\dot{x} = (A + \cancel{BF})x + Sq, \quad x(0) = x_0$

entonces y=Dx

<A + BF |S> c ker D

$S = I_m\ \mathsf{S}$

<A + BF |S> = S + (A+BF)S+…+$(A+BF)^{n-1}$S

Enunciado del DDP "Abstracto"

Dados $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$
$S \subset \mathbb{R}^n$ y $k \subset \mathbb{R}^n$

estudiar se existe $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\langle A + BF \mid S \rangle \subset k$

Subespacios (A,B) invariantes

$V \subset \mathbb{R}^n$ es (A,B) invariante si existe $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\langle A + BF \rangle V \subset V$$

Lema

V (A,B) es invariante $\Leftrightarrow \boxed{AV \subset V + I_m B}$

$\Rightarrow) \forall\ v \in V \quad Av + BFv \in V \Rightarrow Av = -BFv + w, w \in V$

$\Leftarrow)$Sea $(u_1, \quad \cdots \quad , u_d)$ base de V

$$Av_i = w_i - Bu_i, w_i \in V, v_i \in \mathbb{R}^m$$

$$F : V \to \mathbb{R}^m \quad F_0(u_i) = v_i, i = 1, \cdots, d$$

Sea F una extensión de F_0 a $\mathbb{R}^n$

$$F_i\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$F(u_i) \not= v_i; \quad i = 1, \cdots, d$$

$$(A + BF)(u_i) = Au_i + BFu_i = Au_i + Bvu_i = w_i - Bv_i + Bv_i \in V$$

$$S(A_1B; \mathbb{R}^n) = \{\text{subespacio} \quad (A,B) \quad \text{invariante}\}$$
$$S(A_1B; k) = \{\text{subespacio} \quad (A,B) \quad \text{invariante} \ \subset\ k\}$$

k es el subespacio de $\mathbb{R}^n$

Lema

$$V_1, V_2 \in S(A,B,k) \Rightarrow V_1 + V_2 \in S(A,B;k)$$

$$V_i \ \subset\ k \quad i = 1,2$$
$$V_1 + V_2 \ \subset\ k$$

B familia de subespacios de $\mathbb{R}^n$ cerrado por suma :

$$S \text{ y } Z \in \mathbb{R} \Rightarrow S + Z \in B$$

Lema

Si B es cerrado por suma, existe un $V^* \in B$ tal que :

$$V \subset V^* \quad \forall \; V \in B$$

V^* subespacio de máxima dimensión de B

$$V \in B \quad V + V^* \in B \Rightarrow \dim\left(V + V^*\right| \geq \dim V^* \Rightarrow V + V^* = V^* \Rightarrow V \subset V^*\Big)$$

$$V_1^* = V_2^*$$

Proposición

Para todo subespacio vectorial k de $\mathbb{R}^n$ existe un único subespacio (A,B) invariante contenido en k: sup S(k).

Teorema

El DDP (abstracto) tiene solución si y solo si

$$\sup S(k) \supset S$$

comprobación

Sea $V^* = \sup S(k)$ y sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $(A + BF)V^* \subset V^*$

$$< A + BF > c < A + BF|V^* >= V^* + (A + BF)V^* + \cdots + (A + BF)^{n-1} V^*$$

$$(A + BF)^2 V^* = (A + BF)\big((A + BF)V^*\big)$$

solo si

<A+BF|S> c k   <A+BF|S> S(A+BF) invariante

S c <A+BF|S> c sup S(k)